OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2x & 4x\\ -x & 1-2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+2y & 4y\\ -y & 1-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2x+2y & 4y+4x\\ -x-y & 1-2x-2y\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 4(x+y)\\ -(x+y) & 1-2(x+y)\end{pmatrix}=A(x+y)$	**1p**
	b) $\forall A(x),A(y)\in G\overset{?}{\Rightarrow} A(x)\cdot A(y)\in G$ $\left.\begin{matrix}A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\\ x+y\in\mathbb{Z},\quad \forall\, x,y\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(x)\cdot A(y)\in G$	**1p**
	$\forall A(x),A(y)\in G: A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x); A(x+y)=A(y+x)$ (adevărat) (adunarea este comutativă pe $\mathbb{Z}$) $\forall A(x),A(y),A(z)\in G: \left(A(x)\cdot A(y)\right)\cdot A(z)=A(x)\cdot\left(A(y)\cdot A(z)\right);$ $A\left((x+y)+z\right)=A\left(x+(y+z)\right)$ (adevărat) (adunarea este asociativă pe $\mathbb{Z}$)	**1p**
	$\exists A(e)\in G$ astfel încât $A(x)\cdot A(e)=A(e)\cdot A(x)=A(x),\forall A(x)\in G$ $A(x+e)=A(x)\Leftrightarrow x+e=x,\forall x\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow e=0\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow A(e)=A(0)\in G$	**1p**
	$\forall A(x)\in G,\exists A'(x)=A(x')\in G$ astfel încât $A(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot A(x)=A(0)$ $A(x+x')=A(0)\Leftrightarrow x+x'=0\ \Leftrightarrow x'=-x\in\mathbb{Z},\forall\, x\in\mathbb{Z}$ $A'(x)=A(-x)\in G,\forall A(x)\in G$	**1p**
	c) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=A(1)$	**1p**
	$B=\left(A(1)\right)^n=A(n)$	**1p**
	Inducția: $(A(1))^n=A(n),\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ și soluția $B=\begin{pmatrix}1+2n & 4n\\ -n & 1-2n\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Determinăm acele elemente din H pentru care avem $(x-z)(y-z)\ge 0,\forall z\in H$ Dacă $x=y\Rightarrow(x-z)(x-z)=(x-z)^2\ge 0,\ \forall z\in H$ de unde obținem $(x,y)\in\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5)\}$; (1)	**1p**
	Dacă $x\ne y$ atunci din $(x-z)(y-z)\ge 0\Rightarrow z\in(-\infty,x]\cup[y,+\infty)$ pentru $x<y$ (și $z\in(-\infty,y]\cup[x,+\infty)$ pentru $x>y$) Pentru $x<y$ putem scrie $(x-z)(y-z)\ge 0,\forall z\in H\Leftrightarrow\left\{(-\infty,x]\cup[y,+\infty)\right\}\cap H=H$ adevărat pentru orice $x,y\in H$ cu $y=x+1$ de unde obținem $(x,y)\in\{(1,2);(2,3);(3,4);(4,5)\}$; (2)	**2p**
	Pentru $x>y$ se obține $(x,y)\in\{(2,1);(3,2);(4,3);(5,4)\}$; (3) Din (1), (2), (3) rezultă $(x,y)\in\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(2,1);(3,2);(4,3);(5,4)\}$	**1p**
	În toate celelalte cazuri pentru $(x,y)\in HxH\ \ \exists z\in H:\ (x-z)(y-z)<0$.	**1p**

	Tabla operației: o | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 — see table below Din tabla operației obținem că $\forall x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$ deci mulțimea H este parte stabilă în raport cu operația "$\circ$"	**2p**
	b) Din tabla operației obținem $x \circ 3 = 1 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ şi $3 \circ x = 1 \Rightarrow x \in \{1, 4\}$	**2p**

o	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	2	1	1	2	3
2	3	2	1	3	4
3	1	3	2	1	5
4	2	3	3	2	1
5	3	4	5	3	2

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Presupunem că g admite primitive și fie $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă pentru g .	**1p**
	$G(x) = \begin{cases} 2016 \cdot F(x) + C_1 & , x < 2018 \\ 2017 \cdot F(x) + C_2 & , x \geq 2018 \end{cases}$ unde $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă pentru f	**1p**
	G primitivă $\Rightarrow$ G derivabilă, deci continuă $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x<2018}} G(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x>2018}} G(x) = G(2018)$ Obținem $C_1 = F(2018) + C$ şi $C_2 = C$ de unde $G(x) = \begin{cases} 2016 \cdot F(x) + F(2018) + C & , x < 2018 \\ 2017 \cdot F(x) + C & , x \geq 2018 \end{cases}$ G derivabilă $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x<2018}} \dfrac{G(x) - G(2018)}{x - 2018} = \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x>2018}} \dfrac{G(x) - G(2018)}{x - 2018}$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x<2018}} \dfrac{G(x) - G(2018)}{x - 2018} = \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x<2018}} \dfrac{2016 \cdot F(x) - 2016 \cdot F(2018)}{x - 2018} = 2016F'(2018) = 2016 f(2018)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x>2018}} \dfrac{G(x) - G(2018)}{x - 2018} = \lim\limits_{\substack{x \to 2018 \\ x>2018}} \dfrac{2017 \cdot F(x) - 2017 \cdot F(2018)}{x - 2018} = 2017F'(2018) = 2017 f(2018)$	**2p**
	Din $2017 f(2018) = 2016 f(2018) \Rightarrow f(2018) = 0$ contradicție $\Rightarrow g$ nu admite primitive	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive pe $\mathbb{R}$.	**1p**
	$\int \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) dx = \int x' \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) dx =$ $= x \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) - 2\sqrt{2017} \cdot \int \dfrac{\lvert x \rvert}{2017 + x^2} dx$	**3p**
	F este o primitivă a lui $f \Rightarrow \exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) + \sqrt{2017} \ln\left(2017 + x^2\right) + C_1 & , x \leq 0 \\ x \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) - \sqrt{2017} \ln\left(2017 + x^2\right) + C_2 & , x > 0 \end{cases}$	**3p**
	F este continuă $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) = F(0) \Rightarrow C_1 = C$ şi $C_2 = 2\sqrt{2017} \ln 2017 + C$ $\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) + \sqrt{2017} \ln\left(2017 + x^2\right) + C & , x \leq 0 \\ x \cdot \arccos\left(\dfrac{2017 - x^2}{2017 + x^2}\right) - \sqrt{2017} \ln\left(2017 + x^2\right) + 2\sqrt{2017} \ln 2017 + C & , x > 0 \end{cases}$	**2p**