

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**28 ianuarie 2017**

**BAREM**

**CLASA A IX-A**

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	<p>Se demonstrează prin inducție matematică:</p> <p>Verificare: pentru <math>n=1</math> avem <math>\left[\sqrt{1}\right] = \frac{1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5)}{6} \Rightarrow 1 = 1</math></p> <p>pentru <math>n=2</math> avem <math>\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{4}\right] = \frac{2 \cdot (4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5)}{6} \Rightarrow 1 + 1 + 1 + 2 = 5</math></p>	<b>2p</b>
	<p>Demonstrăm: <math>P(k) \rightarrow P(k+1)</math> adevărat, pentru <math>\forall k \in N^*</math></p> <p><math>P(k): \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \dots + \left[\sqrt{k^2}\right] = \frac{k(4k^2 - 3k + 5)}{6}, \forall k \in N^*, \text{ adevărat}</math></p>	<b>1p</b>
	<p><math>P(k+1): \underbrace{\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \dots + \left[\sqrt{k^2}\right]}_{P(k)} + \underbrace{\left[\sqrt{k^2+1}\right] + \dots + \left[\sqrt{k^2+2k}\right]}_{2k+1 \text{ termeni}} + \left[\sqrt{(k+1)^2}\right] =</math></p> <p><math>= \frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 3(k+1) + 5)}{6}, \forall k \in N^*</math></p>	<b>1p</b>
	Cum $\left[\sqrt{k^2+1}\right] + \dots + \left[\sqrt{k^2+2k}\right] = k \cdot 2k$ și $\left[\sqrt{(k+1)^2}\right] = k+1$ obținem	<b>2p</b>
	$\frac{k(4k^2 - 3k + 5)}{6} + k \cdot 2k + (k+1) = \frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 3(k+1) + 5)}{6}, \forall k \in N^*$	<b>1p</b>
	<p>Cum <math>\frac{k(4k^2 - 3k + 5)}{6} + k \cdot 2k + (k+1) = \frac{4k^3 + 9k^2 + 11k + 6}{6}</math></p> <p>și <math>\frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 3(k+1) + 5)}{6} = \frac{4k^3 + 9k^2 + 11k + 6}{6}</math></p> <p><math>\Rightarrow P(k+1)</math> adevărat, pentru <math>\forall k \in N^*</math> de unde <math>\Rightarrow P(k)</math> adevărat, pentru <math>\forall k \in N^*</math></p>	<b>2p</b>
<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	Notăm: $b+c-a=x, c+a-b=y, a+b-c=z, x,y,z > 0$	<b>2p</b>
	Obținem: $a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{x+y}{2}$	<b>2p</b>
	Înlocuind în inegalitatea de demonstrate obținem: $\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3$	<b>2p</b>
	<p>echivalent cu: <math>\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6</math></p> <p>Cum <math>x,y,z &gt; 0 \xRightarrow{m_a \geq m_g} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2; \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2; \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2</math></p> <p>Însumând inegalitățile de mai sus, obținem inegalitatea cerută.</p>	<b>3p</b>

<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'},$	<b>1p</b>
	$AA'$ bisectoare $\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{A'B}{A'C + A'B} = \frac{AB}{AC + AB} \Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = \frac{c}{b+c} \overrightarrow{CB}$	<b>1p</b>
	$BB'$ bisectoare $\Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB' + B'C}{B'C} = \frac{AB + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{B'C} = \frac{c+a}{a} \Rightarrow \overrightarrow{B'C} = \frac{a}{a+c} \overrightarrow{AC}$	<b>1p</b>
	$CC'$ bisectoare $\Rightarrow \frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC' + BC'}{BC'} = \frac{AC + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC'} = \frac{b+a}{a} \Rightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$	<b>1p</b>
	$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{b+c} [\overrightarrow{AB}(b+c) + c\overrightarrow{BC}]$ $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+c} \overrightarrow{CA} = \frac{1}{a+c} [\overrightarrow{BC}(c+a) + a\overrightarrow{CA}]$ $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CB} + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA} = \frac{1}{a+b} [\overrightarrow{CB}(a+b) + a\overrightarrow{BA}]$	<b>3p</b>
	Înlocuind în relație, obținem egalitatea.	<b>2p</b>

<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	<b>a)</b> pentru $n=1 \Rightarrow a_2 = 2 = 1 \cdot 2$ pentru $n=2 \Rightarrow a_3 = 6 = 2 \cdot 3$	<b>2p</b>
	atunci se demonstrează prin inducție că $a_n = (n-1) \cdot n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	<b>2p</b>
	<b>b)</b> pentru orice $k = \overline{1, n}$ avem $\sqrt{4a_k + 1} = \sqrt{4k^2 - 4k + 1} =  2k - 1  = 2k - 1, k \in \mathbb{N}^*$	<b>2p</b>
	atunci $\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$	<b>3p</b>