OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28ianuarie 2017

BAREM

CLASA A X-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{1}{2017}\log_{2016}\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2017}+a_1)}{a_1a_2\ldots a_{2017}} \geq \log_{2016} 2 \Leftrightarrow$	**3p**
	$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2017}+a_1) \geq 2^{2017} a_1a_2\ldots a_{2017}$	**2p**
	Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$, $\frac{a_2+a_3}{2} \geq \sqrt{a_2a_3}$, ……, $\frac{a_{2017}+a_1}{2} \geq \sqrt{a_{2017}a_1}$	**2p**
	Care, prin înmulțire dau relația de mai sus	**1p**
	Egalitatea are loc dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2017}$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Fie $a=x+i\cdot y$ cu $x,\ y\in\Re$, z este definit, dacă $a\neq 1-2i$, deci $x\neq 1$ și $y\neq -2$	**1p**
	$z=\frac{x+(y+1)i}{(x-1)+(y+2)i}=\frac{x(x-1)+(y+1)(y+2)-(x+y+1)i}{(x-1)^2+(y+2)^2}$	**2p**
	$z\in\Re \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$	**1p**
	$M=\{a=x+i\cdot y \mid x\in\Re\setminus\{1\}, y\in\Re\setminus\{-2\}, x+y+1=0\}$ sau $M=\{x+i\cdot(-x-1) \mid x\in\Re\setminus\{1\}\}$	**1p**
	b) $a\in M \Rightarrow x+y+1=0$ $x\neq 1$ și $y\neq -2$ $\lvert a\rvert=\sqrt{5} \Rightarrow x^2+y^2=5$	**1p**
	Rezolvând sistemul de ecuații obținem $x_1=-2$, $y_1=1$ respectiv $x_2=1$ $y_2=-2$ care nu convine,	**2p**
	deci singura soluție este $a=-2+i$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Fie A,B, C punctele în sistemul cartezian cu afixele z_1, z_2, z_3 . Având modulele egale cu 1, punctele se află pe cercul cu centru în origine și raza 1, deci afixul centrului cercului circumscris este punctul O, cu afix 0.	**2p**
	Centrul de greutate G are afixul $g=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}=\frac{1}{3}$	**1p**
	Din $\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}$ obținem că $h=3g=1$,	**2p**

	deci și punctul H (ortocentrul triunghiului) aparține cercului circumscris triunghiului, care este posibil numai dacă triunghiul este dreptunghic.	
	Fie $m\left(\hat{A}\right)=90^\circ \Rightarrow$ BC diametru în cerc, deci O este mijlocul lui BC $\Rightarrow$ $z_3=-z_2$	**2p**
	b) Din $z_3=-z_2$ și $z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow$ $z_1=1$ $z_1^{2017}+z_2^{2017}+z_3^{2017}=1+z_2^{2017}-z_2^{2017}=1$	**2p**
	Soluție alternativă pentru punctul a) $z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=1 \Rightarrow \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=1$ și din $\overline{z_1}\cdot z_1=\lvert z_1\rvert^2=1 \Rightarrow \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ ş. a .m.d, deci $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$	2p
	Din $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=1-\frac{1}{z_3} \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{1-z_3}{-z_3} \Rightarrow \frac{1-z_3}{z_1z_2}=\frac{1-z_3}{-z_3}$ de unde avem 2 situații	1p
	1° dacă $z_3=1$, atunci din $z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow z_1+z_2=0$	1p
	2° dacă $z_3\neq 1 \Rightarrow z_1\cdot z_2=-z_3$ și din $z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow z_1+z_2=1+z_1\cdot z_2 \Rightarrow$ $(z_1-1)(z_2-1)=0$ adică $z_1=1$ sau $z_2=1$	1p
	Deci unul dintre numere este egal cu 1, iar suma celorlalte două este egal cu 0. Fie de exemplu $z_1=1 \Rightarrow z_2+z_3=0$ deci $z_3=-z_2$ și O este mijlocul lui BC, unde A, B, C sunt punctele în sistemul cartezian cu afixele z_1, z_2, z_3 . BC fiind diametru în cercul circumscris triunghiului și *A* este un punct de pe cerc, rezultă că $m\left(\hat{A}\right)=90^\circ$	2p

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Avem $f(x)=\underbrace{[x]+\{x\}}_{=x}-2[x]=\{x\}-[x], \forall x\in\Re.$	**1p**
	Fie $x_1,x_2\in\Re$ astfel, ca $f(x_1)=f(x_2)$. Atunci $\{x_1\}-\{x_2\}=[x_1]-[x_2]\in Z$ (*). Cum $\{x_1\},\{x_2\}\in[0,1)$, avem $\{x_1\}-\{x_2\}\in(-1,1)$ şi conform (*) obţinem $\{x_1\}-\{x_2\}=0$. Prin urmare avem $[x_1]-[x_2]=0$, deci $x_1=x_2$, adică *f* funcția este injectivă.	**3p**
	Fie $y\in\Re$. Ecuaţia $f(x)=y, x\in\Re$ se reduce la: $x-2[x]=y \Rightarrow \{x\}-[x]=\{y\}+[y] \Rightarrow \{x\}-\{y\}=[x]+[y]\in Z$. Deoarece $[x]+[y]\in Z$ obţinem că $\{x\}=\{y\}$, de unde $[x]=-[y]$. Astfel ecuaţia $f(x)=y$ are soluţia $x=\{y\}-[y]$. Rezultă că f este surjectivă.	**3p**
	b) $(f\circ f)(x)=x-2[x]-2[x-2[x]]=x-2[x]-2([x]-2[x])=x, \forall x\in\Re.$ Prin urmare $f\circ f=1_{\Re}$	**2p**