OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

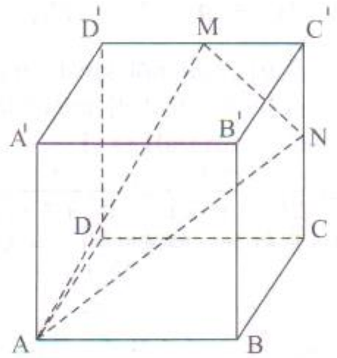
28 ianuarie 2017

BAREM

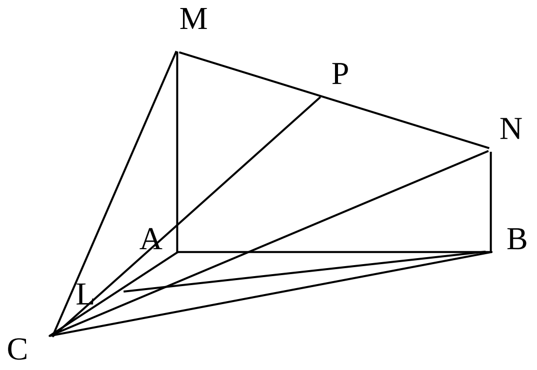
CLASA A VIII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$x \in [-3;4] \Rightarrow -3 \le x \le 4$; adunând 3, obținem: $0 \le x+3 \le 7$	**2p**
	Din $x-7y+3=0 \Rightarrow x+3=7y$ de unde $y \in [0;1]$.	**2p**
	Cum $x=7y-3$ se înlocuiește și se obține: $E(y)=\sqrt{49y^2+y^2}+\sqrt{(7y-7)^2+(y-1)^2}=\sqrt{50y^2}+\sqrt{49(y-1)^2+(y-1)^2}$	**2p**
	$E(y)=\sqrt{50}\cdot\lvert y\rvert+\sqrt{50}\cdot\lvert y-1\rvert=5\sqrt{2}y+5\sqrt{2}(-y+1)=5\sqrt{2}y-5\sqrt{2}y+5\sqrt{2}=5\sqrt{2}$	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$8-5\sqrt{3}=\sqrt{64}-\sqrt{75}<0 \Rightarrow \lvert 8-5\sqrt{3}\rvert=5\sqrt{3}-8$ $\lvert 8-5\sqrt{3}\rvert+8-3\sqrt{3}=5\sqrt{3}-8+8-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}=\sqrt{12}<\sqrt{16} \Rightarrow 2\sqrt{3}<4 \Rightarrow 2\sqrt{3}\notin[4,5)$ Afirmația lui Paul este falsă.	**3p**
	$n^2+n-2=n^2+2n-n-2=n(n+2)-(n+2)=(n+2)(n-1)$ $n^2+5n+6=n^2+2n+3n+6=n(n+2)+3(n+2)=(n+2)(n+3)$ $\frac{n^2+n-2}{n^2+5n+6}=\frac{(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+3)}=\frac{n-1}{n+3}$ Afirmația lui Carol este adevărată.	**3p**
	Pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, $u(1^p+5^p+6^p)=u(1+5+6)=2 \Rightarrow 1^p+5^p+6^p$ este par Pentru $p=0$, $1^p+5^p+6^p=1+1+1=3 \Rightarrow 1^p+5^p+6^p$ este impar Deoarece numai una dintre cele trei afirmații este adevărată, iar afirmația lui Carol este adevărată, rezultă că afirmația Anei este falsă. Deci pentru numărul gândit de Ana $1^p+5^p+6^p$ nu este par. Rezultă că Ana s-a gândit la numărul $p = 0$.	**3p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen 	**1p**

	a) $NC \perp (ABC), AC \subset (ABC) \Rightarrow NC \perp AC$ $D'M \perp (AA'D'), AD' \subset (AA'D') \Rightarrow D'M \perp AD'$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} NC = D'M = 4 \\ AD' = AC = 8\sqrt{2} \\ \widehat{AD'M} \equiv \widehat{ACN} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AD'M \equiv \Delta ACN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ este isoscel	**2p**
	b) Fie $MP \perp AN, P \in AN$. În $\Delta MC'N$, $MN = 4\sqrt{2}$ cm În $\Delta AD'M$, $AM^2 = D'M^2 + D'A^2 \Rightarrow AM = \sqrt{4^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = 12$ (cm)	**2p**
	Fie $AS \perp MN, S \in MN$ În $\Delta AMS, AM^2 = AS^2 + SM^2 \Rightarrow AS = \sqrt{12^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{34}$ (cm) $A_{[AMN]} = \dfrac{MN \cdot AS}{2} = 8\sqrt{17} = \dfrac{AN \cdot MP}{2} \Rightarrow MP = \dfrac{4\sqrt{17}}{3}$ cm	**2p**
	$\sin\left(\widehat{MAN}\right) = \dfrac{MP}{AM} = \dfrac{\sqrt{17}}{9}$	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen 	**1p**
	a) Fie $PE \perp AB, E \in AB$ $PE \parallel MA, MA \perp (ABC) \Rightarrow PE \perp (ABC)$ $PE \perp (ABC); E, C \in (ABC) \Rightarrow m\left(CP, \widehat{(ABC)}\right) = m\left(\widehat{CP, CE}\right) = m\left(\widehat{PCE}\right)$ În ΔPCE, $tg\left(\widehat{PCE}\right) = \dfrac{PE}{CE}$	**2p**
	În trapezul $MNBA$, $MP = PN, PE \parallel MA \Rightarrow [PE]$ este linie mijlocie $PE = \dfrac{MA + NB}{2} = 9$ cm	**1p**
	În $\Delta ACE, CE^2 = AC^2 + AE^2 \Rightarrow CE = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$ $tg\left(\widehat{PCE}\right) = \dfrac{9}{\sqrt{89}} = \dfrac{9\sqrt{89}}{89}$	**1p**

	b) Fie $LT \parallel MA$, $T \in MC$. $AL = LC, LT \parallel AM \Rightarrow [LT]$ este linie mijlocie în ΔACM $LT = \frac{MA}{2} = 6$ cm $LT \parallel MA, MA \parallel BN \Rightarrow LT \parallel BN$ $LT \parallel BN, BN = LT \Rightarrow LTNB$ este paralelogram $\Rightarrow TN \parallel LB$	**2p**
	$TN \parallel LB, TN \subset (MNC), LB \not\subset (MNC) \Rightarrow LB \parallel (MNC)$	**2p**