

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

VARIANTA 2

Profesori

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

	I. FELADAT	(30 pont)
	1. Minden nullától különböző n természetes szám esetén jelölje a_n az $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ szám utolsó számjegyét.	
5p	a) Igazolja, hogy $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.	
5p	b) Számolja ki az a_7 számot!	
3p	c) Igazolja, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat periodikus és periódusa 20.	
2p	d) Számolja ki az a_m számot, ha $m = 2011^{2011}$.	
	2. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Az A' , B' , és C' pontok az ABC háromszög köré írt kör \widehat{BC} , \widehat{CA} , illetve \widehat{AB} kisebbik köríveinek felezőpontjai és I az ABC háromszögbe írt kör középpontja.	
5p	a) Bizonyítsa be, hogy AA' , BB' és CC' összefutó egyenesek!	
5p	b) Igazolja, hogy a BIA' háromszög egyenlő szárú!	
3p	c) Bizonyítsa be, hogy I az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja!	
2p	d) Bizonyítsa be, hogy $AI = IA'$ akkor és csak akkor, ha $r = R(1 - \cos A)$, ahol r az ABC háromszögbe írt kör sugara, R az ABC háromszög köré írt kör sugara.	

	II. FELADAT	(30 pont)
--	--------------------	------------------

	1. Adott az $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz.	
--	--	--

5p	a) Ellenőrizze, hogy $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \in M$.	
----	---	--

5p	b) Igazolja, hogy ha $x, y \in M$, akkor $x + y - xy \in M$.	
----	--	--

3p	c) Adott az $x = a + b\sqrt{5} \in M$, $x \neq 0$. Igazolja, hogy $\frac{1}{x} \in M$ akkor és csak akkor, ha $ a^2 - 5b^2 = 1$.	
----	--	--

2p	d) Igazolja, hogy végtelen sok olyan $x \in M$ elem van, amelyre $\frac{1}{x} \in M$.	
----	--	--

	2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ függvény.	
--	--	--

5p	a) Igazolja, hogy az f függvény bármely primitív függvénye szigorúan növekvő \mathbb{R} -en!	
----	--	--

5p	b) Számolja ki: $\int f(x) \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.	
----	---	--

3p	c) Bizonyítsa be, hogy az f függvénynek nincs határértéke $+\infty$ -ben!	
----	--	--

2p	d) Számolja ki: $\int_0^{2\pi} f(x) \, dx$.	
----	--	--

III. TÉTEL	(30 pont)
-------------------	------------------

Tervezzon egy írásbeli felmérőt és annak javítókulcsát az év végi összefoglaló (szummatív) felméréshez abban a tantárgyban/egy olyan tantárgyban, amelyre versenyvizsgázik, felső tagozatosok vagy középiskolások számára.

A dolgozat értékelésekor pontozni fogják:

- a következő adatok feltüntetését: a tantárgy megnevezését, az osztályt, a fejezetek nevét/a tartalmakat és a munkaidőt;
- alkosson 2 feleletválasztásos itemet, amelynek 2 válaszlehetősége van, 2 feleletválasztásos itemet, amelynek több válaszlehetősége van, egy rövid feleletalkotó itemet és egy strukturált esszét/problémamegoldást igénylő itemet;
- alkossa meg a feladatlap javítókulcsát, amelyben a feladatok 90 pontot érnek, a megjelenésre 10 pont jár!