



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile
XI. Osztály

1. Tétel

Adottak az $A(a) = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Igazold, hogy $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Határozd meg az $A^n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$ mátrixot!
- Igazold, hogy $\det A(2) + \det A^2(2) + \det A^3(2) + \dots + \det A^{2022}(2) < 2^{2023}$.

2. Tétel

Adott az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ függvény.

- Határozd meg a D halmazt, amely az f függvény maximális értelmezési tartománya!
- Írd fel az f függvény grafikus képének $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!
- Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]^x$.

3. Tétel

Adott az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ függvény.

- Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \in (0, \infty)$.
- Igazold, hogy $f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022) \in (0, 1)$.
- Írd fel a $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{f(x)}$ függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét, ha tudjuk, hogy ez áthalad az $A(-1, 0)$ ponton!

4. Tétel

Az (xOy) derékszögű koordinátarendszerben egy biliárdasztalt vázlatosan, egy $OABC$ téglalappal ábrázolunk úgy, hogy $A \in Oy$, $C \in Ox$, $OA = 2a$, $OC = a$ és $a \in (0, \infty)$.

- Határozd meg annak a P pontnak a koordinátáit, ahol egy fehér golyó található, tudva, hogy ez $\frac{a}{2}$ távolságra van az AB -től és $\frac{a}{2}$ távolságra van a BC -től.
- Határozd meg a biliárdasztal BC oldalán lévő M pont koordinátáit, ahová a P golyót úgy küldjük, hogy az az O pontnál levő zsebbe pattanjon!
- Határozd meg azt a legkisebb a egész számot, amelyre a golyó kiindulási helyzete, az M pont és az O zseb által alkotott háromszög területe egy természetes szám!