MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 9-a

Varianta 2

Problema 1. Determinaţi funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x+y)}$ este un număr natural nenul, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $m(\angle A) = 90°$ şi punctele D şi E pe cateta AB astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$. Arătaţi că dacă $3\overline{AD} = 2\overline{DE}$ şi $\overline{CD} + \overline{CE} = 2\overline{CM}$ atunci $\overline{AB} = 4\overline{AM}$.

Problema 3. Fie AD, BE, CF înălţimile triunghiului ABC şi K, L, M ortocentrele triunghiurilor AEF, BFD, respectiv CDE. Notăm cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor DEF, respectiv KLM. Să se arate că $HG_1 = G_1G_2$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}$ considerăm funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x-a)f(x)$. Arătaţi că dacă există o infinitate de valori $a \in \mathbb{Z}$ pentru care funcţiile f_a sunt crescătoare, atunci şi funcţia f este monotonă.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.