Societatea de Științe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei forduló, 2018. március 10.

IX. OSZTÁLY

2. változat

1. feladat. Határozd meg azokat a szigorúan növekvő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényeket, amelyekre $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x+y)}$ nem nulla természetes szám, bármely $x,y\in\mathbb{N}$ esetén!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az ABC derékszögű háromszögben $m(\widehat{A})=90^\circ$, az AB befogón felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $\widehat{ACD}\equiv\widehat{DCE}\equiv\widehat{ECB}$.

Bizonyítsd be, hogy ha $3AD=2DE$ és $CD+CE=2CM$, akkor $AB=4AM$.

3. feladat. Legyenek AD, BE és CF az ABC háromszög magasságai, H az ABC háromszög magasságpontja. K, L és M az AEF, BFD illetve CDE háromszögek magasságpontjai. Jelölje G_1 és G_2 a DEF, illetve KLM háromszögek súlypontjait.

Igazold, hogy $HG_1=G_1G_2$.

4. feladat. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény. Minden $a\in\mathbb{Z}$ szám esetén értelmezzük az $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=(x-a)f(x)$ függvényt. Igazold, hogy ha végtelen sok olyan $a\in\mathbb{Z}$ szám létezik, amelyekre az f_a függvény növekvő, akkor az f függvény is monoton.

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.