MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
100 ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a XI-a

Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr întreg, atunci există matricele inversabile $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu elementele nenule, aşa încât

$$A_1^{-1} + A_2^{-1} + \ldots + A_n^{-1} = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^{-1}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Considerăm mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid ab = cd \right\}.$$

a) Daţi exemplu de matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2017} \in M$ şi $A^{2019} \in M$, dar $A^{2018} \notin M$.

b) Arătaţi că, dacă $A \in M$ şi există numărul întreg $k \geq 1$ astfel încât $A^k \in M$, $A^{k+1} \in M$ şi $A^{k+2} \in M$, atunci $A^n \in M$, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$.

Problema 3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $a_n > 1$ şi $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ pentru $n \geq 1$ este convergent şi calculaţi-i limita.

Problema 4. Fie $a < b$ numere reale şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât funcţiile $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x - a)f(x)$ şi $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x - b)f(x)$ să fie crescătoare. Arătaţi că funcţia f este continuă pe (a, b).

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.