



Matematika tantárgyverseny
Megyei forduló, 2018. március 10.

XI. OSZTÁLY

2. változat

1. feladat. Igazold, hogy ha $n \geq 2$ egész szám, akkor léteznek az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrixok, amelyek elemei nem nullák, úgy, hogy

$$A_1^{-1} + A_2^{-1} + \dots + A_n^{-1} = (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^{-1}.$$

Gazeta Matematică

2. feladat. Adott az

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid ab = cd \right\}$$

halmaz.

- a) Adj példát olyan $A \in M$ mátrixra, amelyre $A^{2017} \in M$ és $A^{2019} \in M$, de $A^{2018} \notin M$.
b) Igazold, hogy ha $A \in M$ és létezik olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k \in M$, $A^{k+1} \in M$ és $A^{k+2} \in M$, akkor $A^n \in M$, bármely $n \geq 1$ egész szám esetén!

3. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatról tudjuk, hogy $a_n > 1$ és $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$ bármely $n \geq 1$ esetén. Legyen $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ bármely $n \geq 1$ esetén.

Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

4. feladat. Adottak az $a < b$ valós számok és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre a $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - a)f(x)$ és $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (x - b)f(x)$ növekvő függvények. Igazold, hogy az f függvény folytonos az (a, b) intervallumon!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.