MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Societatea de Științe Matematice din România
100 ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Matematika tantárgyverseny
Megyei forduló, 2018. március 10.

XII. OSZTÁLY

2. változat

1. feladat. Legyen $\mathcal{F}$ azoknak az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeknek a halmaza, amelyekre $\max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$, és legyen $I\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) + f(1).$$

(a) Igazold, hogy $I(f) < 3$ bármely $f \in \mathcal{F}$ esetén!
(b) Határozd meg a $\sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ szuprémumot!

2. feladat. Legyen $p \ge 2$ természetes szám és $(M, \cdot)$ egy véges monoid úgy, hogy $a^p \ne a$ bármely $a \in M \setminus \{e\}$ esetén, ahol e az M monoid semleges eleme. Igazold, hogy $(M, \cdot)$ csoport!

Gazeta Matematică

3. feladat. Igazold, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény akkor és csak akkor növekvő, ha

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

bármely $a < b < c$ valós számok esetén!

4. feladat. Adottak az n és q természetes számok úgy, hogy $n \ge 2$, $q \ge 2$ és $q \not\equiv 1 \pmod 4$. Legyen K egy pontosan q elemű véges test. Igazold, hogy bármely $a \in K$ esetén létezik $x \in K$ és $y \in K$ úgy, hogy $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. (Minden véges test kommutatív.)

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.