MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Societatea de Științe Matematice din România

ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Matematika tantárgyverseny
Megyei forduló, 2018. március 10.

VIII. OSZTÁLY

2. változat

1. feladat. Igazold, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} \neq 1.$$

($\{x\}$ az x valós szám tört részét jelöli)

Gazeta Matematică

2.feladat. Ha $a, b, c \in [1, \infty)$, bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

3. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben M, N és P az $[AB]$, $[BC]$ illetve $[BB']$ élek felezőpontjai. Legyen $\{O\} = A'N \cap C'M$.

a) Igazold, hogy a D, O és P pontok kollineárisak!

b) Igazold, hogy MC' akkor és csak akkor merőleges az $(A'PN)$ síkra, ha $ABCDA'B'C'D'$ kocka!

4. feladat. **a)** Az a, b, c nem nulla természetes számokra $a < b < c$ és $a^2 + b^2 = c^2$. Bizonyítsd be, hogy ha $a_1 = a^2$, $a_2 = ab$, $a_3 = bc$, $a_4 = c^2$, akkor

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 \quad \text{és} \quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

b) Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ szám esetén léteznek az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nem nulla természetes számok, amelyekre

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2 \quad \text{és} \quad a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n.$$

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.