MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Societatea de Științe Matematice din România
ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a VIII-a

Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} \neq 1.$$

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.)

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $a, b, c \in [1, \infty)$. Demonstraţi că

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

Problema 3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Notăm cu M, N şi P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[BB']$. Fie $\{O\} = A'N \cap C'M$.
a) Arătaţi că punctele D, O, P sunt coliniare.
b) Arătaţi că $MC' \perp (A'PN)$ dacă şi numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Problema 4. a) Fie numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $a < b < c$ şi $a^2 + b^2 = c^2$. Demonstraţi că dacă $a_1 = a^2$, $a_2 = ab$, $a_3 = bc$, $a_4 = c^2$, atunci $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ şi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.
b) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ care verifică relaţiile $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ şi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.