

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

megyei szakasz, 2023. február 4.

XII. osztály

1. feladat (10 pont). Az $M = (-1, 2)$ halmazon értelmezzük a „ $*$ ” műveletet úgy, hogy $x * y = \frac{xy + 4(x + y) - 2}{2xy - (x + y) + 5}$, bármely $x, y \in (-1, 2)$ esetén. Tudjuk, hogy $(M, *)$ Abel-féle csoport.

a) Igazold, hogy az $f: (0, \infty) \rightarrow (-1, 2)$, $f(x) = \frac{2-x}{1+x}$ függvény egy izomorfizmus az (\mathbb{R}_+, \cdot) és $(M, *)$ csoportok közt!

b) Igazold, hogy

$$\left(\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \dots * \left(-\frac{2021}{2024}\right) = 1.$$

(***)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Az f függvény izomorfizmus, hogyha f bijektív és művelettartó, vagyis $f(xy) = f(x) * f(y)$, minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$f(xy) = \frac{2 - xy}{1 + xy}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x) * f(y) &= \frac{f(x)f(y) + 4(f(x) + f(y)) - 2}{2f(x)f(y) - (f(x) + f(y)) + 5} \\ &= \frac{\frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{2-y}{1+y} + 4 \cdot \left(\frac{2-x}{1+x} + \frac{2-y}{1+y}\right) - 2}{2 \cdot \frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{2-y}{1+y} - \left(\frac{2-x}{1+x} + \frac{2-y}{1+y}\right) + 5} \\ &= \frac{4 - 2x - 2y + xy + 4(2 - x + 2y - xy + 2 - y + 2x - xy) - 2(1 + x + y + xy)}{2(4 - 2x - 2y + xy) - (2 - x + 2y - xy + 2 - y + 2x - xy) + 5(1 + x + y + xy)} \\ &= \frac{18 - 9xy}{9 + 9xy} = \frac{2 - xy}{1 + xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén. Tehát az (1) és (2) összefüggések alapján $f(xy) = f(x) * f(y)$, minden $x, y \in (0, \infty)$ esetén, vagyis az f függvény csoportmorfizmus. (2 pont)

Az f függvény deriválható a $(0, \infty)$ intervallumon és $f'(x) = \frac{-3}{(1+x)^2} < 0$, minden $x \in (0, \infty)$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan csökkenő, tehát az f injektív. (1 pont)

Az f függvény folytonos a $(0, \infty)$ intervallumon, az f szigorúan csökkenő, illetve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ és $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 2$, ezért az f képe $\text{Im } f = (-1, 2)$, tehát az f szürjektív. Mivel az f injektív és szürjektív, ezért az f bijektív. (1 pont)

b) Bevezetjük az $a = \left(\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \dots * \left(-\frac{2021}{2024}\right)$ jelölést. Észrevehető, hogy

$$\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1} = \frac{2 - \frac{1}{2023!}}{1 + \frac{1}{2023!}} = f\left(\frac{1}{2023!}\right) \text{ és } -\frac{n}{n+3} = \frac{2 - (n+2)}{1 + (n+2)} = f(n+2),$$

minden $n \in \{1, 2, \dots, 2021\}$ esetén, tehát az a kifejezés a következő alakba írható át

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2 \cdot 2023! - 1}{2023! + 1}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \left(-\frac{2}{5}\right) * \dots * \left(-\frac{2021}{2024}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2023!}\right) * f(3) * f(4) * \dots * f(2023). \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Az a) alpont szerint az f függvény egy izomorfizmus az (\mathbb{R}_+^*, \cdot) és $(M, *)$ csoportok között, így

$$\begin{aligned} a &= f\left(\frac{1}{2023!}\right) * f(3) * f(4) * \dots * f(2023) \\ &= f\left(\frac{1}{2023!} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2023\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg az összes $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ primitiválható függvényt, amelyeknek az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényére teljesül, hogy $F(0) = 0$ és $F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Matlap 10/2022 L:3528

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az $F(x) + \ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén egyenlőséget átrendezve az $F(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln f(x)$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $F(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{f(x)}\right)$. Ennek a kifejezésnek pedig megfelel az $e^{F(x)} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{f(x)}$ egyenlőség, ahonnan kapjuk, hogy

$$f(x) \cdot e^{F(x)} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (3)$$

(3 pont)

Felhasználva, hogy $F'(x) = f(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a (3) összefüggés alapján írhatjuk, hogy $F'(x) \cdot e^{F(x)} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (1 pont)

Mivel $F'(x) \cdot e^{F(x)} = (e^{F(x)})'$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén és $1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (x + \sqrt{1+x^2})'$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, a (3) összefüggés az $(e^{F(x)})' = (x + \sqrt{1+x^2})'$ függvényegyenlethez vezet. (1 pont)

Tudjuk, hogy ha $f'(x) = g'(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - g(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans. Így $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2} + c$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (1 pont)

Az $F(0) = 0$ feltételből meghatározható a c konstans, és pedig $c = 0$. (1 pont)

Tehát $e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$, ahonnan $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (1 pont)

Így csak az $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$,

$$f(x) = F'(x) = \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvény teljesíti a kért feltételeket.

(1 pont)

Megjegyzés. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ megoldás megsejtéséért és leellenőrzéséért összesen 3 pont jár.

■

3. feladat (10 pont). Tekintsük azoknak az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögeknek a H_n halmazát, amelyek oldalhosszai $(2n+1)$ -nél kisebb vagy egyenlő egész számok.

- Hány eleme van a H_n halmaznak?
- Az $n = 7$ esetben mennyi a valószínűsége annak, hogy tetszőlegesen választva egy háromszöget a H_7 halmazból, az tompaszögű háromszög legyen?

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

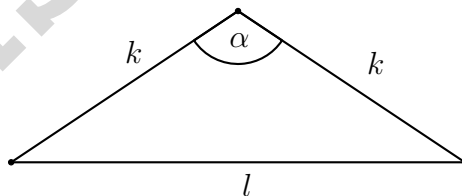
- Először megvizsgáljuk, hogy hány olyan háromszög van, melynek szárai k hosszúságúak, ahol $k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$. A k, k, l egy ilyen háromszög oldalhosszai pontosan akkor, ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenségek közül az $1 \leq l < 2k$ (a másik kettő automatikus), ugyanakkor $l \leq 2n+1$ és $l \neq k$. (1 pont)

Ha $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, akkor az $1 \leq l < 2k$ feltétellel együtt az $l \leq 2n+1$ feltétel is teljesül. Ebben az esetben a k szárhosszú háromszögek száma $2k-1$, és mivel $k \neq l$ következik, hogy $2k-2$ darab ilyen háromszög van. (1 pont)

Ha $k \in \{n+2, n+3, \dots, 2n+1\}$, akkor az $1 \leq l < 2k$ és $l \leq 2n+1$ feltételekből kapjuk, hogy $1 \leq l \leq 2n+1$ és $l \neq k$, így k -től függetlenül $2n$ darab háromszöget kapunk. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy a H_n halmaz elemeinek száma

$$\begin{aligned} |H_n| &= \sum_{k=1}^{n+1} (2k-2) + \sum_{k=n+2}^{2n+1} 2n = 2 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2(n+1) + 2n \cdot n \\ &= (n+1) \cdot n + 2n^2 = 3n^2 + n. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

- Egy egyenlő szárú háromszögben csak az alappal szemben fekvő szög lehet tompaszög, jelöljük ezt α -val. A koszinusz tételből következik, hogy $\cos \alpha = \frac{2k^2 - l^2}{2k^2} < 0$, ha α tompaszög. Így a háromszögek közül azok lesznek tompaszögűek, melyekre teljesül az $1 \leq l < 2k$, $l \leq 2n+1$ és $l \neq k$ feltételek mellett az $l^2 > 2k^2$ feltétel is. (2 pont)



A feltételeknek megfelelő háromszögek oldalhosszai $n = 7$ esetén a következők:

$$(2, 2, 3), (3, 3, 5), (4, 4, 6), (4, 4, 7), (5, 5, 8), (5, 5, 9), (6, 6, 9), \\ (6, 6, 10), (6, 6, 11), (7, 7, 10), (7, 7, 11), (7, 7, 12), (7, 7, 13), (8, 8, 12), \\ (8, 8, 13), (8, 8, 14), (8, 8, 15), (9, 9, 13), (9, 9, 14), (9, 9, 15), (10, 10, 15).$$

Tehát 21 kedvező esetünk van.

(2 pont)

Az előző alpont alapján a lehetséges esetek száma $3 \cdot 7^2 + 7 = 154$, így a kért valószínűség $p = \frac{21}{154} = \frac{3}{22}$.

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$\mathcal{I} = \int \frac{b^x - a^x + (xb^x + 1) \ln a - (xa^x + 1) \ln b}{x^2(ab)^x + x(a^x + b^x) + 1} dx$$

integrált, ahol a és b pozitív valós számok és $x \in (0, \infty)$!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

A nevezőt tényezőkre bontjuk

$$x^2(ab)^x + x(a^x + b^x) + 1 = x^2a^xb^x + xa^x + xb^x + 1 \\ = \underbrace{(xa^x + 1)}_A \underbrace{(xb^x + 1)}_B.$$

(1 pont)

A fenti jelöléseket használva kapjuk, hogy $B - A = x(b^x - a^x)$, ahonnan $b^x - a^x = \frac{B-A}{x}$, így az eredeti integrál átírható

$$\mathcal{I} = \int \frac{\frac{1}{x}(B - A) + B \ln a - A \ln b}{AB} dx.$$

alakba.

(2 pont)

Az integrált felbontjuk két integrál különbségére a következőképpen:

$$\mathcal{I} = \underbrace{\int \frac{\frac{1}{x} + \ln a}{A} dx}_{\mathcal{J}} - \underbrace{\int \frac{\frac{1}{x} + \ln b}{B} dx}_{\mathcal{K}}.$$

(2 pont)

Az \mathcal{J} integrálban szereplő törtet ha bővítjük xa^x -szel, vagyis $\frac{\frac{1}{x} + \ln a}{A} = \frac{a^x + xa^x \ln a}{xa^x(xa^x + 1)}$, akkor a számlálóban egy függvény deriváltját kapjuk, azaz $(xa^x)' = a^x + xa^x \ln a$.

(1 pont)

A $\mathcal{J} = \int \frac{a^x + xa^x \ln a}{xa^x(xa^x + 1)} dx$ integrálban végrehajtva az $xa^x = t$, $(a^x + xa^x \ln a) dx = dt$ változócserét, kapjuk, hogy

$$\mathcal{J} = \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t| - \ln |t+1| + C = \ln \left| \frac{xa^x}{xa^x + 1} \right| + C.$$

(2 pont)

Hasonlóan

$$\mathcal{K} = \int \frac{\frac{1}{x} + \ln b}{B} dx = \ln \left| \frac{xb^x}{xb^x + 1} \right| + \mathcal{C}.$$

Tehát az eredeti integrál

$$\mathcal{I} = \ln \left(\frac{xa^x}{xa^x + 1} \right) - \ln \left(\frac{xb^x}{xb^x + 1} \right) + \mathcal{C} = \ln \left[\frac{a^x(xb^x + 1)}{b^x(xa^x + 1)} \right] + \mathcal{C}. \quad (1 \text{ pont})$$

■