A 76-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 14 februarie 2026
Clasa a VII-a

Problema 1.
Fie

$$N=\frac{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{1012}\right)\right]^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2026}\right)}.$$

Arătați că N este un număr natural.

Problema 2.
Două terenuri au suprafețele egale, fiecare, cu câte 48 m^2. Un teren are formă dreptunghiulară, cu lungimea egală cu triplul lățimii, iar celălalt are formă de pătrat.

a) Calculați lungimea laturii terenului în formă de pătrat.

b) Calculați dimensiunile terenului dreptunghiular.

c) Se împrejmuiesc cele două terenuri cu garduri de sârmă. Arătați că pentru a împrejmui terenul dreptunghiular sunt necesari mai mulți metri de sârmă decât pentru împrejmuirea terenului în formă de pătrat.

Gazeta Matematică

Problema 3.

a) Determinați numărul natural $\overline{ab}$ scris în sistemul zecimal, care verifică relația $3\sqrt{\overline{ab}}=2(a+b)$.

b) Determinați numerele întregi a și b, care verifică relația

$$\sqrt{5^2+12^2}\cdot|a+2|+\sqrt{b}=2\sqrt{7}+39.$$

Problema 4.
În pătratul $ABCD$, punctul E este un punct al laturii CD astfel încât $EC=2\cdot ED$, iar O este punctul de intersecție al diagonalelor. Fie $EF\perp AC$, unde $F\in AB$, $EF\cap AC=\{N\}$, $EF\cap BC=\{P\}$, iar M este mijlocul segmentului EF. Demonstrați că:

a) $BFED$ este paralelogram și $A_{BFED}=\frac{1}{3}\cdot A_{ABCD}$;

b) $AECF$ este trapez isoscel și $A_{AECF}=A_{ABCD}$;

c) dreptele OP și MC sunt perpendiculare.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!
Timp de lucru 3 ore.
Toate problemele sunt notate de la 0 la 22,5 puncte și în total 10 puncte din oficiu.