76. Országos Matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2026. február 14.
VIII. osztály

1. feladat. Adottak az $A = \left\{ x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 3 \right\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq 3\}$ halmazok.

a) Határozd meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat!

b) Igazold, hogy az $a = \frac{\sqrt{3}+8}{2}$ szám eleme a B halmaznak!

2. feladat. Az A-ban derékszögű ABC háromszögben $AB = AC = 4\sqrt{2}\,cm$. A háromszög síkjára az A pontban merőlegest állítunk, amelyen felvesszük az E és F pontokat az ABC sík azonos oldalán úgy, hogy $AE = 4\sqrt{3}\,cm$ és $AF = 4\sqrt{15}\,cm$. Igazold, hogy az EBC háromszög területe az ABC és FBC háromszögek területeinek mértani közepe!

3. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasáb alapéle $AB = 2\,cm$ és oldaléle $AA' = 2\sqrt{3}\,cm$.

Határozd meg:

a) az AC és $A'B$ egyenesek által közrezárt szög tangensét;

b) a BC' és CD' egyenesek által közrezárt szög szinuszát.

4. feladat. Adott a $p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025 \cdot 2024}}$ szám.

a) Igazold, hogy p racionális szám!

b) Ha $p = \frac{a}{b}$ irreducibilis tört, határozd meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre

$$\sqrt{a+b+n} \in \mathbb{N}.$$

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
Munkaidő 3 óra.
Minden feladatot 0-tól 22,5-ig pontozunk és összesen 10 pont jár hivatalból