Examenul de bacalaureat 2016
Simularea probei E.c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ *M_st-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. **Varianta 5**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert x-2\rvert \le 4 \Leftrightarrow -4\le x-2\le 4 \Rightarrow -2\le x\le 6$	**2p**
	$x\in[-2;6]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$	**2p**
	Suma soluțiilor: $S=(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6=18$	**1p**
2.	Din $a_{n+1}-a_n=3\Rightarrow(a_n)_{n\ge1}$ este progresie aritmetică	**2p**
	$a_1=1, a_n=3n-2, S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}\Rightarrow 51=\frac{(3n-1)n}{2}, n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
	Obținem: $n=6$	**1p**
3.	Coordonatele punctelor de intersecție vor fi soluțiile reale ale sistemului: $\begin{cases} y=2x-1\\ y=x^2-3x+5\end{cases}$	**1p**
	$\Rightarrow\begin{cases}x^2-5x+6=0\\ y=2x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ y_1=3\end{cases}$ respectiv $\begin{cases}x_2=3\\ y_2=5\end{cases}$	**3p**
	Punctele de intersecție sunt: $A(2,3)$ și $B(3,5)$.	**1p**
4.	$(f\circ f)(0)=f(f(0))$	**1p**
	$f(0)=1$ și $f(1)=0$	**2p**
	$\Rightarrow(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=0$	**2p**
5.	Din regula paralelogramului avem: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$	**1p**
	Din regula triunghiului avem: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$	**1p**
	$ABCD$- romb $\Rightarrow BD\perp AC$	**1p**
	În concluzie $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$	**2p**
6.	Din teorema cosinusului rezultă: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle A)\Rightarrow BC^2=13$	**2p**
	Din teorema sinusului rezultă: $R=\frac{BC}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{39}}{3}$	**3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$X\cdot Y=A$	**3p**
	$\Rightarrow S=O_3$	**2p**
b)	$BC=(I_3+A)(I_3+aA)=I_3+A+aA+aA^2,$	**1p**
	$A^2=14\cdot A$	**2p**
	$\Rightarrow BC=I_3+(1+15a)A.$	**1p**
	$BC=I_3\Leftrightarrow 15a+1=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{15}$	**1p**
c)	Inducție matematică: Pentru $n=2\Rightarrow A^2=14\cdot A$	**1p**
	Presupunem adevărat pentru $k: A^k=14^{k-1}\cdot A$	**1p**
	Demonstrăm pentru $k+1$: $A^{k+1}=A^k\cdot A=14^{k-1}A\cdot A=14^{k-1}A^2=14^{k-1}\cdot 14A=14^kA$	**2p**
	$A^n=14^{n-1}\cdot A$ adevărat pentru $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 2$	**1p**

2.a)	Fie pentru $\forall y\in\mathbb{Z}, A_y=\begin{pmatrix}1 & 2y & 5y^2-2y\\ 0 & 1 & 5y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	Calculul $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1 & 2y+2x & 5y^2-2y+10xy+5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5y+5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	Pentru a arăta: $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$ adevărat $\forall x,y\in\mathbb{Z}$	**2p**
b)	Conform punctului a) înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe G	**1p**
	Legea indusă este asociativă, are element neutru $I_3=A_0\in G$ şi orice matrice $A_x\in G$ este inversabilă şi are inversa $A_{-x}\in G$.	**3p**
	$\Rightarrow(G,\cdot)$ este grup.	**1p**
c)	1) *f* este injectivă $\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow A_{x_1}=A_{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$	**1p**
	2) *f* este surjectivă $\Leftrightarrow\forall A_x\in G$ există $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=A_x$, adevărat conform definiţiei mulţimii *G* şi a funcţiei *f*.	**1p**
	Din 1) şi 2) rezultă că *f* este funcţie bijectivă. (3)	**1p**
	4) Conform a) şi definiţiei lui *f* avem: $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ f(x+y)=A_{x+y}=A_xA_y=f(x)\cdot f(y)$.	**1p**
	Din 3) şi 4) rezultă că *f* este un izomorfism între grupurile cerute.	**1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	*f* este continuă şi derivabilă ca diferenţa a două funcţii elementare.	**1p**
	$f'(x)=\dfrac{36x^2-1}{x}$ şi studiul semnului derivatei.	**3p**
	Funcţia *f* este descrescătoare pe intervalul $\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$ şi crescătoare pe intervalul $\left[\dfrac{1}{6},\infty\right)$.	**1p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to o\\ x>0}} f(x)=\infty\Rightarrow$ funcţia are asimptotă verticală şi ecuaţia ei este x=0.	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(18-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=\infty\Rightarrow$ funcţia nu are asimptotă orizontală.	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(18-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=\infty\Rightarrow$ funcţia nu are asimptotă oblică.	**1p**
c)	Cel mai mare număr *a* pentru care $f(x)\ge a,$ pentru orice $x\in(0,\infty)\Leftrightarrow a=\min f(x)$.	**2p**
	Din punctual a) rezultă că funcţia are minim global în $x=\dfrac{1}{6}$ de unde $a=f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 6$	**3p**
2.a)	$F(x)=-e^{-x}+1\Rightarrow$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=(-f(x)+1)'=..=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**3p**
b)	h este concavă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow h''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Din a) $\Rightarrow h'(x)=(-2f(x)+1)'=...=2e^{-x}\Rightarrow h''(x)=-2e^{-x}\Rightarrow h''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$I=\int e^x dx-\int\dfrac{3}{2x^2+6}dx=e^x-\int\dfrac{3}{2x^2+6}dx$	**2p**
	$\int\dfrac{3}{2x^2+6}dx=\dfrac{3}{2}\int\dfrac{1}{x^2+3}dx=...=\dfrac{\sqrt{3}}{2}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$	**2p**
	$\Rightarrow I=e^x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$	**1p**