Examenul de bacalaureat 2016
Simularea probei E.c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ *M_st-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. **Varianta 5**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

I. TÉTEL **(30 pont)**

5p **1.** Számítsd ki a $|x-2|\le 4$ egyenlőtlenség egész szám megoldásainak összegét!

5p **2.** Mutasd ki, hogy az $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=3n-2$ sorozat egy számtani haladvány és határozd meg az n értékét, amelyre $a_1+a_2+...+a_n=51$.

5p **3.** Határozd meg az $y=2x-1$ egyenes és az $y=x^2-3x+5$ parabola metszéspontjainak koordinátáit!

5p **4.** Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, számítsd ki az $(f\circ f)(0)$ értékét!

5p **5.** Legyen $ABCD$ egy rombusz. Számítsd ki a $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)$ szorzatot!

5p **6.** Az ABC háromszögben $AB=3$, $AC=4$ és $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Határozd meg a háromszög köré írt kör sugarának a hosszát!

II. TÉTEL **(30 pont)**

1. Adottak a következő mátrixok:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&9&6\\2&6&4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix},\ B=I_3+A,\ C=I_3+aA,\ a\in\mathbb{R}$$

5p **a)** Számítsd ki az $S=A-X\cdot Y$ mátrixot!

5p **b)** Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ értékét, amelyre $BC=I_3$.

5p **c)** Mutasd ki hogy $A^n=14^{n-1}A$ bármely n, $n\ge2$ természetes szám esetén!

2. Adott a $G=\left\{A_x \middle| x\in\mathbb{Z}\right\}$ halmaz, ahol $A_x=\begin{pmatrix}1&2x&5x^2-2x\\0&1&5x\\0&0&1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Mutasd ki, hogy $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$ bármely $x,y\in\mathbb{Z}$ esetén!

5p **b)** Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzására nézve egy csoport!

5p **c)** Mutasd ki, hogy az $f:\mathbb{Z}\to G,\ f(x)=A_x$ függvény egy izomorfizmus a $(\mathbb{Z},+)$ és $(\mathrm{G},\cdot)$ csoportok között!

III. TÉTEL **(30 pont)**

1. Adott az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=18x^2-\ln x$ függvény.

5p **a)** Tanulmányozd az f függvény monotonítását!

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikonjának aszimptotáit!

5p **c)** Határozd meg azt a legnagyobb a értéket amelyre $f(x)\ge a$, bármely $\mathrm{x}\in(0,\infty)$.

2. Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}$ és $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=-f(x)+1$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy az F függvény, $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén az f-függvénynek egy primitiv függvénye!

5p **b)** Igazold, hogy a $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=F(x)-f(x)$ függvény konkáv az $\mathbb{R}$ -en!

5p **c)** Számítsd ki: $I=\displaystyle\int\left(f(-x)-\frac{3}{2x^2+6}\right)dx$.