Examenul de bacalaureat 2016
Simularea probei E.c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ *M_mate-info*

Varianta 5

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Conform proprietăţii fundamentale a progresiei geometrice avem $x(2x+1)=1$ adică $2x^2+x-1=0$.	**2p**
	Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1=-1$ pentru care termenii progresiei sunt –1, 1, –1 acesta nu convine nefiind descrescătoare.	**2p**
	$x_2=\frac{1}{2}$ pentru care termenii progresiei sunt $2, 1, \frac{1}{2}$ care convine. Deci $x=\frac{1}{2}$.	**1p**
2.	Funcţia de gradul al doilea admite un maxim, deci $a<0$.	**1p**
	Graficul funcţiei trece prin origine deci $f(0)=0$ adică $b=0$.	**2p**
	Maximul funcţiei este $\max f(x)=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-16}{4a}=2$ deci $a=-2$.	**2p**
3.	$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x<0$	**1p**
	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{16}{25}$, deci $\cos x=-\frac{4}{5}$	**2p**
	$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$	**2p**
4.	Fie *x* şi *y* cele două numere întregi. Atunci avem $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$.	**1p**
	Rezultă că $\begin{cases} y=x-3 \\ x(x-3)=2(x+x-3) \end{cases}$	**1p**
	adică avem $x^2-5x+6=0$ care admite soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=6$.	**1p**
	Pentru $x_1=1$ obţinem $y_1=-2$ iar pentru $x_2=6$ avem $y_2=3$ deci problema are două soluţii.	**2p**
5.	$\vec{v}$ coliniar cu $\vec{u}\Leftrightarrow \frac{a-1}{-1}=\frac{2a}{-3}$	**2p**
	de unde rezultă că $a=3$.	**3p**
6.	Calculăm lungimile laturilor: $AB=5$, $AC=5$, $CB=5\sqrt{2}$	**3p**
	Triunghiul este dreptunghic isoscel, astfel $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{25}{2}$.	**2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$	**1p**
	$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$.	**3p**
	Astfel avem soluţia $x = 1, y = 0, z = 3$.	**1p**
b)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(a-3)$, deci pentru $a = 3$ avem $\det A = 0$, rang$A$=2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,	**3p**
	$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b$. Sistemul este incompatibil dacă determinantul caracteristic este nenul adică $b \in R^*$.	**2p**
c)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(a-3)$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ a & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4a - 32$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4a - 2$.	**1p**
	$x = \dfrac{5}{a-3}$, $y = \dfrac{2a-16}{a-3} = 2 - \dfrac{10}{a-3}$, $z = \dfrac{2a-1}{a-3} = 2 + \dfrac{5}{a-3}$	**1p**
	$x, y, z \in Z \Rightarrow 5 \vdots (a-3) \Rightarrow (a-3) \in \{-5, -1, 1, 5\}$	**1p**
	$a-3 = -5 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow x = -1, y = 4, z = 1$; $a-3 = -1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = -5, y = 12, z = -3$; $a-3 = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow x = 5, y = -8, z = 7$; $a-3 = 5 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow x = 1, y = 0, z = 3$	**2p**
2.a)	$x \circ y = y \circ x \Leftrightarrow 2xy - 6x - 6y + 21 = 2yx - 6y - 6x + 21$ adevărat pentru $\forall x, y \in R$ deci operaţia este comutativă.	**2p**
	$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2(x-3)(y-3) + 3$, astfel $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = 2^2(x-3)(y-3)(z-3) + 3$ deci operaţia este asociativă.	**3p**
b)	$2xe - 6x - 6e + 21 = 2ex - 6e - 6x + 21 = x$	**2p**
	$(2e-7)(x-3) = 0$ deci $e = \dfrac{7}{2} \in R$ este elementul neutru.	**3p**
c)	$x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3 \Rightarrow x \circ x = 2(x-3)^2 + 3$.	**1p**
	Cu metoda inducţiei matematice se demonstrează că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } n\text{-ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3$. Asfel $\underbrace{4 \circ 4 \circ \ldots \circ 4}_{\text{de } n\text{-ori}} = 1027 \Leftrightarrow 2^{n-1}(4-3)^n + 3 = 1027$	**3p**
	adică $2^{n-1} + 3 = 1027$ de unde $n = 11$.	**1p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{2x-3} = \frac{1}{2}$	**2p**
	graficul funcţiei spre –∝ are asimptotă orizontală de ecuaţie $y = \frac{1}{2}$.	**3p**
b)	Funcţia *f* este derivabilă pe intervalul (–∝, 1) fiind compusă din funcţii elementare.	**1p**
	Pe acest interval avem $f`(x) = \left(\frac{x-1}{2x-3}\right)' = \frac{-1}{(2x-3)^2}$	**3p**
	deci $f`(0) = -\frac{1}{9}$.	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + ... + f(e^{x^{2015}})}{x^{2015}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + x^2 + ... + x^{2015}}{x^{2015}}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + x^2 + ... + x^{2015}}{x^{2015}} = 1$	**2p**
2.a)	Funcţia *f* este continuă pe intervalele (–∝, 0) şi (0, +∝) fiind compusă din funcţii elementare.	**1p**
	$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \sqrt{x^2+1} = 1$, $l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x + 3x = 1$, $f(0) = 1$ deci funcţia este continuă în *x* = 0	**3p**
	Rezultă că funcţia *f* fiind continuă pe *R*, este primitivabilă pe *R*.	**1p**
b)	Dacă $F : R \to R$ este o primitivă a funcţiei *f*, atunci $F`(x) = f(x)$ pentru $\forall x \in R$.	**2p**
	Însă $f(x) > 0$ pentru $\forall x \in R$	**2p**
	deci funcţia *F* este strict crescătoare pe *R*.	**1p**
c)	Folosim substituţia $u(x) = \sqrt{x^2+1}$ pentru care $u`(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	**2p**
	deci avem $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+2)} dx = \int \frac{u`(x)}{u^2(x)+1} dx = \text{arctg}\, u(x) + C = \text{arctg}\sqrt{x^2+1} + C$.	**3p**