



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

XII. osztály

1. feladat

Az $a \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük a $G_a = (a, +\infty)$ halmazt és a G_a halmazon értelmezett az $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$ műveletet, bármely $x, y \in G_a$ esetén.

- Igazold, hogy $(G_a, *)$ Abel-féle csoport!
- Bizonyítsd be, hogy az $f_a: G_a \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = \ln(x - a)$ függvény izomorfizmus a $(G_a, *)$ és az $(\mathbb{R}, +)$ csoportok között!
- Értelmezz egy „ \circ ” műveletet a $G = (2023, +\infty)$ halmazon és egy „ Δ ” műveletet a $H = (2024, +\infty)$ halmazon, úgy, hogy a (G, \circ) és a (H, Δ) izomorf Abel-féle csoportok legyenek!

2. feladat

A $G = (1, +\infty)$ de halmazon értelmezzük az $x \circ y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$, bármely $x, y \in G$ esetén, asszociatív műveletet.

Igazold, hogy:

- $x \circ y = 2^{\frac{1}{3} \log_2 x \cdot \log_2 y}$, bármely $x, y \in G$ esetén;
- minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in G, x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ úgy, hogy $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n$ természetes szám legyen;
- $2022 \circ 2024 < 2023 \circ 2023$.

3. feladat

Egy vegyipari gyárban történt baleset során a gyár környezete megszennyeződik.

A szennyezettségi együtthatót az $I_n = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$, valós szám modellezi. I_0 jelöli közvetlenül a baleset utáni együtthatót, I_n pedig a szennyezettségi együtthatót az n -edik napon a baleset után. A környezetet tisztának tekintjük, ha a szennyezettségi együttható legtöbb 5-tel egyenlő.

- Igazold, hogy $I_0 > 50$.
- Igazold, hogy az idő teltével a szennyezettségi együttható csökken (vagyis $I_n \geq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$)!
- Igazold, hogy legtöbb 20 nap alatt megszűnik a szennyezettség!

4. feladat

A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény asszociált függvényének nevezzük, ha $g(x) + \int_0^x f(x-t)dt = e^x$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

- Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ függvény $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asszociált függvényét!
- Igazold, hogy ha a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény asszociált függvénye, akkor a g deriválható és $g'(x) = e^x - f(x)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!
- Határozd meg azt az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelynek az asszociált függvénye az f .