„ADOLF HAIMOVICI" ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

KÖRZETI SZAKASZ

2016. január 30.

XII . OSZTÁLY

1.) Adott az $\alpha > 0$ valós szám és a $G_\alpha = (\alpha, \infty)$ halmaz. A valós számok halmazán értelmezzük az $(x, y) \to x * y = xy - \alpha(x + y) + \alpha^2 + \alpha, \forall x, y \in R$ műveletet.

a) Igazold, hogy bármely $\alpha > 0$ esetén a G_α halmaz zárt részhalmaza *R*-nek a „*" műveletre vonatkozóan!

b) $\alpha = 3$ esetén határozd meg a „*" műveletre nézve a semleges elemet valamint az $x = 5$ szimmetrikus elemét!

c) $\alpha = 3$ és $f(x) = -18 + \sum_{k=5}^{10} \underbrace{x * x * ... * x}_{k-szor}$ esetén igazold, hogy $f(5) = 2016$.

2.) Adott az $M = \left\{ A^n / A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n \in N \right\}$ halmaz.

a) Határozd meg az M halmaz elemeit !

b) Igazold, hogy ($M, \cdot$) kommutatív csoport !

3.) Adott az $f : (-1, \infty) \to R,\ f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ függvény. Igazold, hogy léteznek olyan a, b, c valós számok, amelyre az $F : (-1, \infty) \to R, F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \operatorname{arctg} x$ függvény az f függvény egy primitív függvénye!

4.) Adott az $f : (1, \infty) \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$ függvény. Határozd meg az *f* függvénynek azt az *F* primitív függvényét, amelyre $F\left(e^{e-1}\right) = 2$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.