CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A X-A
(4 ore/săptămână)

1.) Rezolvați ecuațiile de mai jos:

a) $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900,\ x \in \mathbb{R}^*$.

2.) Dacă $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in [2,3]$, arătați că:

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + ... + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n$$

3.) Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, astfel încât $f(f(x)) = 4x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$

b) $f(4^n) = 4^n f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

4.) **a)** Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \text{ és } \left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 \right\}$.

b) Fie α și β soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

Calculați valoarea expresiei: $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016}$.

c) Arătați că pentru $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ are loc inegalitatea: $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore