„ADOLF HAIMOVICI" ALKALMAZOTT MATEMATIKAVERSENY
KÖRZETI SZAKASZ
2016. JANUÁR 30.

XI. OSZTÁLY

1.) Felhasználva a determinánsok tulajdonságait igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-c-a \end{vmatrix} \geq 0, \text{ ahol } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

2.) **a)** Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek nincs határértéke az $x_0=0$ pontban!

b) Igazold, hogy ha $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=1$, ahol $a,b,c,d>0$ akkor $ad=bc$.

3.) Adottak az $A_k=\begin{pmatrix} 5k & k^2-1 \\ (-1)^k & 3^k \end{pmatrix}$ mátrixok, $k\in N$.

a) Számítsd ki az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$ összeget!

b) Hány eleme van az $M=\left\{A_0^n,\ n\in N^*\right\}$ halmaznak?

4.) Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x\,\mathrm{tg}x\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)}, & \text{ha } x<0 \\ a, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$ függvénynek legyen határértéke az

$x_0=0$ pontban!.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.