

## „ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

## KÖRZETI SZAKASZ

2016. január 30.

## IX. OSZTÁLY

(4 órás program)

- 1.) Ha  $x \in [-3, 1]$  és  $x - 2y + 3 = 0$ , számítsd ki a

$$K = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} \text{ kifejezés egész részét!}$$

- 2.) Adott az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat és a  $\frac{2n}{a_n} = \frac{n+1}{a_{n+1}} + \frac{n-1}{a_{n-1}}$  összefüggés, ahol  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{3}{7}$ .

- a) Bizonyítsd be, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{n}{a_n}$  általános tagú sorozat egy számtani

haladvány, majd határozd meg állandó különbségét és az általános tag képletét!

- b) Határozd meg az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozatnak azt az  $(y_k)_{k \geq 0}$  részsorozatát, amelynek tagjai egész számok!

- 3.) a) Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$ , ahol  $\{x\}$  az  $x$  valós szám törtrésze.

Számítsd ki az  $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{5}{2}\right) + \dots + f\left(-\frac{2015}{2}\right)$  összeget!

- b) Oldd meg  $\mathbb{R}$ -ben az  $\left\lfloor \sqrt{\frac{x+5}{3}} \right\rfloor = \frac{x+2}{3}$  egyenletet, ahol  $[a]$  az  $a$  valós szám egész részét jelenti!

- 4.) Az  $ABC$  háromszögben  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AC]$ ,  $P \in [AB]$  úgy, hogy  $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$ .

Igazold, hogy:

- a) az  $AM$ ,  $BN$ ,  $CP$  szakaszokkal háromszög szerkeszthető!

- b) az  $ABC$  háromszög síkjának bármely  $O$  pontja esetén

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

- c) az  $ABC$  és  $MNP$  háromszögek súlypontjai egybeesnek!

**Megjegyzés:**

**Minden feladat kötelező.**

**Minden feladat 10 pontot ér.**

**Munkaidő 3 óra.**