

**„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY**

**KÖRZETI SZAKASZ**

**2016. január 30.**

**X. OSZTÁLY**

**(4 órás program)**

1.) Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a)  $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2, n \in \mathbb{N}^*$

b)  $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900, x \in \mathbb{R}^*.$

2.) Ha  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [2, 3]$  igazold, hogy:

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n$$

3.) Legyen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , úgy hogy  $f(f(x)) = 4x, \forall x \in \mathbb{Z}$ . Igazold, hogy:

a)  $f(0) = 0$

b)  $f(4^n) = 4^n f(1), \forall n \in \mathbb{N}$

4.) a) Határozd meg az  $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ és } \left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 \right\}$  halmaz elemeit!

b) Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  a  $z^2 - z + 1 = 0$  egyenlet gyökei.

Számítsd ki az  $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016}$  kifejezés értékét!

c) Igazold, hogy  $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$  esetén fennáll a  $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$  egyenlőtlenség!

**Megjegyzés:**

**Minden feladat kötelező.**

**Minden feladat 10 pontot ér.**

**Munkaidő 3 óra.**