MATEMATIKA OLIMPIA

KÖRZETI SZAKASZ

2016. január 30.

X. OSZTÁLY

1.) Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900,\ x \in \mathbb{R}^*$.

2.) Ha $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in [2,3]$ igazold, hogy:

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + ... + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n$$

3.) Legyen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, úgy hogy $f(f(x)) = 4x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Igazold, hogy:

a) $f(0) = 0$

b) $f(4^n) = 4^n f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

4.) **a)** Határozd meg az $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\ \textit{és}\ \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1 \right\}$ halmaz elemeit!

b) Legyenek α és β a $z^2 - z + 1 = 0$ egyenlet gyökei.

Számítsd ki az $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016}$ kifejezés értékét!

c) Igazold, hogy $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ esetén fennáll a $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$ egyenlőtlenség!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.