OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A XI-A

1.) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2016 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R}_+)$ pentru care au loc relațiile $A \cdot X = X \cdot A$ și $X^{2016} + X = A$.

2.) Fie a, b, c respectiv A, B, C lungimile laturilor, respectiv măsurile unghiurilor unui triunghi. Arătați că: $\begin{vmatrix} b\cos C & c\cos B & \sin A \\ c\cos A & a\cos C & \sin B \\ a\cos B & b\cos A & \sin C \end{vmatrix} = 0$.

3.) Se consideră șirul recurent $(a_n)_{n\in N}$ pentru care $a_0 = 2$ și a_{n+1} este egal cu modulul soluțiilor complexe ale ecuației de gradul doi cu coeficienți numere reale $z^2 - a_n z + a_n = 0$.

a) Determinați în funcție de *n* formula termenului general al șirului.

b) Calculați limita șirului $(b_n)_{n\in N}$, unde $b_n = 2^n(a_n - 1)$.

4.) Pentru fiecare mulțime din mulțimile $A_n = \{1,2,...,n\}$, se consideră mulțimea $B_n \subset A_n$ după următoarea regulă: pentru orice $x, y \in B_n, x \le y$ avem $xy \notin B_n$ și B_n conține cele mai multe elemente posibile. Formăm șirul $(b_n)_{n\ge1}$ cu $b_n = |B_n|$ (cardinalul mulțimii B_n), pentru orice $n \in N^*$.

a) Determinați mulțimea B_{2016} și calculați valoarea lui b_{2016}.

b) Determinați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n\ge1}$ în funcție de *n*.

c) Determinați termenul general al șirului $c_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n^2-1} b_i}{n^4}$ și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ în cazul în care există, sau arătați că această limită nu există.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.