MATEMATIKA OLIMPIA

KÖRZETI SZAKASZ

2016. január 30.

XI. OSZTÁLY

1.) Adott az A = $\begin{pmatrix} 2 & 2016 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix. Határozd meg az $X \in M_2(\mathbb{R}_+)$ mátrixot, amelyre $A \cdot X = X \cdot A$ és $X^{2016} + X = A$.

2.) Legyen *a*, *b*, *c* illetve *A*, *B*, *C* egy háromszög oldalainak hossza, illetve szögeinek mértéke.

Igazold, hogy $\begin{vmatrix} b\cos C & c\cos B & \sin A \\ c\cos A & a\cos C & \sin B \\ a\cos B & b\cos A & \sin C \end{vmatrix} = 0$.

3.) Adott az $(a_n)_{n\in N}$ rekurziós sorozat a következőképpen: $a_0 = 2$ és a_{n+1} a $z^2 - a_n z + a_n = 0$ valós együtthatójú másodfokú egyenlet komplex gyökeinek modulusa.

a) Add meg a sorozat *n*-től függő, nem rekurziós képletét!

b) Számítsd ki a $(b_n)_{n\in N}$, $b_n = 2^n(a_n - 1)$ sorozat határértékét!

4.) Adottak az $A_n = \{1, 2, ..., n\}$ halmazok és mindegyikhez hozzárendelünk egy $B_n \subset A_n$ halmazt a következő szabály szerint: bármely $x, y \in B_n$, $x \le y$ esetén $xy \notin B_n$ és B_n a lehető legtöbb elemet tartalmazza. Képezzük a $(b_n)_{n\ge1}$ sorozatot, ahol $b_n = |B_n|$, azaz a B_n halmaz elemeinek száma, bármely $n \in N^*$ esetén.

a) Határozd meg a B_{2016} halmazt és add meg a b_{2016} értékét!

b) Határozd meg a $(b_n)_{n\ge1}$ sorozat általános tagjának *n*-től függő képletét!

c) Határozd meg a $c_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n^2-1} b_i}{n^4}$ sorozat általános tagját és számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ határértéket, ha létezik, vagy igazold, hogy nem létezik!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.