MATEMATIKA OLIMPIA

KÖRZETI SZAKASZ

2016. január 30.

IX . OSZTÁLY

1.) Ha $x \in [-3,1]$ és $x-2y+3=0$, számítsd ki a

$K=\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}$ kifejezés egész részét!

2.) Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat és a $\frac{2n}{a_n}=\frac{n+1}{a_{n+1}}+\frac{n-1}{a_{n-1}}$ összefüggés, ahol $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{3}{7}$.

a) Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{n}{a_n}$ általános tagú sorozat egy számtani haladvány, majd határozd meg állandó különbségét és az általános tag képletét!

b) Határozd meg az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak azt az $(y_k)_{k\geq 0}$ részsorozatát, amelynek tagjai egész számok!

3.) **a)** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$, ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrésze.

Számítsd ki az $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(-\frac{5}{2}\right)+...+f\left(-\frac{2015}{2}\right)$ összeget!

b) Oldd meg *R*-ben az $\left[\sqrt{\frac{x+5}{3}}\right]=\frac{x+2}{3}$ egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelenti!

4.) Az ABC háromszögben $M\in[BC]$, $N\in[AC]$, $P\in[AB]$ úgy, hogy $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}$.

Igazold, hogy:

a) az AM, BN, CP szakaszokkal háromszög szerkeszthető!

b) az ABC háromszög síkjának bármely O pontja esetén

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

c) az ABC és MNP háromszögek súlypontjai egybeesnek!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.