OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A IX-A

1.) Dacă $x \in [-3,1]$ și $x-2y+3=0$, calculați partea întreagă a expresiei

$K=\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}$

2.) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ și relația $\frac{2n}{a_n}=\frac{n+1}{a_{n+1}}+\frac{n-1}{a_{n-1}}$ unde $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{3}{7}$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{n}{a_n}$ este o progresie aritmetică și determinați rația progresiei, respectiv formula termenului general.

b) Determinați subșirul $(y_k)_{k\geq 0}$ al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, care are termenii numere întregi.

3.) **a)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real *x*.
Calculați suma: $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(-\frac{5}{2}\right)+...+f\left(-\frac{2015}{2}\right)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+5}{3}}\right]=\frac{x+2}{3}$, unde cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real *a*.

4.) În triunghiul ABC se consideră punctele $M\in[BC]$, $N\in[AC]$, $P\in[AB]$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}$. Arătați că:

a) cu segmentele AM, BN, CP se poate construi un triunghi.

b) Pentru orice punct O din planul triunghiului ABC are loc relația:
$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

c) centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și MNP coincid.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore