

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

CLASA A X-A

1.) Rezolvați ecuațiile de mai jos:

a) $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900, x \in \mathbb{R}^*.$

2.) Dacă $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [2, 3]$, arătați că:

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n$$

3.) Se consideră funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, astfel încât $f(f(x)) = 4x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$

b) $f(4^n) = 4^n f(1), \forall n \in \mathbb{N}$

4.) a) Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ și } \left| \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 \right\}.$

b) Fie α și β soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

Calculați valoarea expresiei: $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016}.$

c) Arătați că pentru $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ are loc inegalitatea: $|z + 1| + |z^2 + 1| + |z^3 + 1| \geq 2$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore