„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

KÖRZETI SZAKASZ

2017. január 28.

IX . OSZTÁLY

(4 órás program

1.) Bizonyítsd be az alábbi egyenlőséget:

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2}\right]=\frac{n\left(4n^2-3n+5\right)}{6}, \forall n \in N^*,$$

ahol $[x]$, az x egész részét jelöli!

2.) Ha a, b, c az ABC háromszög oldalainak hossza, igazold, hogy:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

3.) Legyenek AA', BB', CC' az ABC általános háromszög belső szögfelezői, ahol $A' \in BC$, $B' \in AC$ és $C' \in AB$. Ha a, b és c rendre a BC, AC illetve az AB oldalak hosszai, igazold, hogy:

$$(b+c)\overrightarrow{AA'}+(a+c)\overrightarrow{BB'}+(a+b)\overrightarrow{CC'}=(2b-a-c)\overrightarrow{AB}+(2c-a-b)\overrightarrow{AC}$$

4.) Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $a_1=0$ és $a_{n+1}=a_n+1+\sqrt{4a_n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Határozd meg n függvényében a sorozat a_n általános tagját!

b) Igazold, hogy: $\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1}=n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.