

„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY

KÖRZETI SZAKASZ

2017. január 28.

XII. OSZTÁLY

1.) A komplex számok halmazán értelmezzük az  $x * y = xy - i(x + y) - 1 + i$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{C}$  műveletet és legyen  $z_n = \underbrace{z * z * \dots * z}_{n\text{-szer}}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

- a) Határozd meg azt az  $(a, b)$  valós számpárt, amelyre  $(2 + i) * (2 - i) = a + bi$ .
- b) Határozd meg a "\*" művelet semleges elemét!
- c) Számítsd ki az  $i_{2017}$  értékét!

2.) Adottak az  $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$  és  $h_{p,q} : (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h_{p,q}(x) = p \cdot x + \frac{q}{\sqrt{x}}$ ,  $p, q \in \mathbf{Q}$  függvények.

- a) Határozd meg a  $p, q \in \mathbf{Q}$  értékeit, amelyekre az  $f$ , primitív függvénye a  $h_{p,q}$  függvénynek!
- b) Igazold, hogy ha  $F : (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  egy primitív függvénye  $f$ -nek, akkor  $F(\sqrt{2}) < F(\sqrt[3]{3})$ .

3.) Számítsd ki :

a)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \cdot e^{\arctan x} dx$

b)  $\int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

4.) ISBN egy azonosítószám, amely a könyvek nemzetközi nyilvántartására szolgáló kód.

1966-ban hozták létre az Egyesült Királyságban és 2007 január 1 -től 13 számjegye van. Minden könyvnek különböző ISBN kódja van, amelynek alakja:  $c_1 c_2 c_3 - c_4 c_5 c_6 - c_7 c_8 - c_9 c_{10} c_{11} c_{12} - c_{13}$ .

Egy ISBN kód helyességét a következő képlettel tudjuk leellenőrizni:  $c_{13} = 10 - A \bmod 10$ , ahol

$$A = 1 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 3 \cdot c_4 + 1 \cdot c_5 + 3 \cdot c_6 + 1 \cdot c_7 + 3 \cdot c_8 + 1 \cdot c_9 + 3 \cdot c_{10} + 1 \cdot c_{11} + 3 \cdot c_{12}$$

Állapítsd meg, hogy a 978-606-55-4725-4 számsor egy ISBN kód-e?

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.