„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY
KÖRZETI SZAKASZ
2017. január 28.

X . OSZTÁLY
(4 órás program

1.) Igazold, hogy

$$\log_{2016} \sqrt[2017]{1+\frac{a_2}{a_1}} + \log_{2016} \sqrt[2017]{1+\frac{a_3}{a_2}} + \ldots\ldots + \log_{2016} \sqrt[2017]{1+\frac{a_1}{a_{2017}}} \geq \frac{1}{5+\log_2 63}$$

bármilyen $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ szigorúan pozitív valós számok esetén! Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

2.) Legyen $a \in C$ és $z = \dfrac{a+i}{a-1+2i}$.

a) Határozd meg az $M = \{a \in C \mid z \in \mathbb{R}\}$ halmazt!

b) Határozd meg az $a \in M$ komplex számokat, amelyekre $|a| = \sqrt{5}$.

3.) Adottak a z_1, z_2, z_3 különböző komplex számok, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ és $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

a) Bizonyítsd be, hogy z_1, z_2, z_3 egy derékszögű háromszög csúcsainak affixumai, és kettő közülük ellentétes számok!

b) Számítsd ki a $z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017}$ összeget!

4.) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$ függvény, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy az f függvény bijektív!

b) Határozd meg az $f \circ f$ függvényt!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.