CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
28 ianuarie 2017

CLASA A IX-A
(4 ore/săptămână)

1.) Demonstrați următoarea egalitate:

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2}\right]=\frac{n\left(4n^2-3n+5\right)}{6}, \forall n\in N^*,$$

unde $\left[x\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

2.) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC, arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

3.) Fie ABC un triunghi oarecare, având bisectoarele interioare AA', BB', CC' unde $A'\in BC$, $B'\in AC$ și $C'\in AB$. Dacă a, b și c sunt lungimile laturilor BC, AC respectiv AB, să se demonstreze relația:

$$(b+c)\overrightarrow{AA'}+(a+c)\overrightarrow{BB'}+(a+b)\overrightarrow{CC'}=(2b-a-c)\overrightarrow{AB}+(2c-a-b)\overrightarrow{AC}$$

4.) Fie şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1=0$ şi $a_{n+1}=a_n+1+\sqrt{4a_n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

a) Aflaţi în funcție de n termenul general a_n al şirului.

b) Demonstraţi că: $\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\ldots+\sqrt{4a_n+1}=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore