CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

28 ianuarie 2017

CLASA A X-A

(4 ore/săptămână)

1.) Demonstrați că

$$\log_{2016}\sqrt[2017]{1+\frac{a_2}{a_1}} + \log_{2016}\sqrt[2017]{1+\frac{a_3}{a_2}} + \ldots\ldots + \log_{2016}\sqrt[2017]{1+\frac{a_1}{a_{2017}}} \geq \frac{1}{5+\log_2 63}$$

pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ numere reale strict pozitive. În ce condiții are loc egalitatea?

2.) Fie $a \in C$ și $z = \frac{a+i}{a-1+2i}$.

a) Determinați mulțimea $M = \{a \in C \mid z \in R\}$.

b) Determinați numerele complexe $a \in M$, pentru care $|a| = \sqrt{5}$.

3.) Se dau numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

a) Arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic și două dintre ele sunt numere opuse.

b) Calculați suma $z_1^{2017} + z_2^{2017} + z_3^{2017}$.

4.) Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = x - 2[x]$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real *x*.

a) Arătați că funcția *f* este bijectivă.

b) Determinați funcția $f \circ f$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore