„ADOLF HAIMOVICI” ALKALMAZOTT MATEMATIKA VERSENY
KÖRZETI SZAKASZ
2017. január 28.

X . OSZTÁLY
(3 órás program)

1.) **a)** Igazold, hogy $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\in\mathbf{N}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}<3,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

2.) **a)** Igazold, hogy $\forall x,y,z\in(1;+\infty)$ esetén az $E=\dfrac{\log_{2016}x+\log_{2016}\sqrt{y}+\log_{2016}\sqrt[3]{z}}{\log_{2017}x+\log_{2017}\sqrt{y}+\log_{2017}\sqrt[3]{z}}$

kifejezés értéke nem függ az $x,y,z\in(1;+\infty)$ változók értékeitől!

b) Bizonyítsd be, hogy, ha $x>0, y>0$ és $x^2+4y^2=12xy$, akkor

$\lg(x+2y)-2\lg 2=\dfrac{1}{2}(\lg x+\lg y)$.

3.) Igazold, hogy bármely z komplex szám esetén igaz a

$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|^2+i\cdot\left|z+\dfrac{i}{2}\right|^2-(1+i)\cdot|z|^2-\dfrac{1}{4}\cdot(1+i)=z$ összefüggés!

4.) Adott az $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sqrt{x+1}+\log_2\left(2-x-x^2\right)$ függvény.

a) Határozd meg az f függvény **D** maximális értelmezési tartományát!

b) Határozd meg az $\mathbf{A}=\{m\in\mathbf{C}\mid m\cdot(m-f(0))+m\cdot f(-1)+2=0\}$ halmazt!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.