

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ÚLOHA I.

(30 bodov)

- 5b 1. Nájdite reálne čísla a i b vediac, že $\frac{1+i}{1-i} = a + ib$, $i^2 = -1$.
- 5b 2. Nájdite súradnice bodov prieniku medzi súradnými osami a grafom funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- 5b 3. Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $9^{\frac{x+2}{2}} + 3^{x+1} = 36$.
- 5b 4. Výpočítajte pravdepodobnosť toho, že ak náhodne vyberieme jedno číslo z množiny všetkých dvojčíferných prirodzených čísel, potom toto číslo nebude obsahovať číslicu 6.
- 5b 5. V karteziánskej súradnej sústave xOy majme body $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$ i $C(0, -2)$. Nájdite rovnicu rovnobežky vedenej bodom C s priamkou AB .
- 5b 6. Nájdite $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pre ktoré $\frac{1 + \sin x}{\sin x} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$.

ÚLOHA II.

(30 bodov)

1. Je daná matica $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
- 5b a) Ukážte, že $\det(A(a)) = (a+2)(a-1)^2$, pre ľubovoľné reálne číslo a .
- 5b b) Vypočítajte inverznú maticu k $A(-1)$ v $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5b c) Nájdite dvojice prirodzených čísel (a, b) , pre ktoré matica $A(a) \cdot A(b)$ má súčet prvkov 24.
2. Na množine reálnych čísel sa definuje binárna operácia $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Operácia „ $*$ ” je asociatívna a má neutrálny prvok.
- 5b a) Ukážte, že $x * y = 3(x-1)(y-1) + 1$, pre ľubovoľné reálne čísla x a y .
- 5b b) Vypočítajte $\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \frac{3}{1007} * \dots * \frac{2014}{1007}$.
- 5b c) Nájdite reálne čísla x , ktoré sa rovnajú ich symetrickým prvkom voči operácie „ $*$ ”.

ÚLOHA III.

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x-1}$.
- 5b a) Nájdite rovnicu šikmej asymptoty ku grafu funkcie f .
- 5b b) Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode so súradnicou $x = 2$, ktorý patrí grafu funkcie f .
- 5b c) Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{x+3}$.
2. Pre každé nenulové prirodzené číslo n majme číslo $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.
- 5b a) Vypočítajte I_1 .
- 5b b) Ukážte, že $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo n .
- 5b c) Ukážte, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{2}$.