

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024****CLASA a VIII-a**

**Problema 1.** Se consideră numerele reale nenule  $a$  și  $b$ , astfel încât

$$3(a^6 + b^6) = a^2b^2(a^2b^2 + 9).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele  $a$  și  $b$  este irațional.

**Problema 2.** Se consideră piramida patrulateră regulată  $VABCD$ , cu baza  $ABCD$  și punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$ , mijloacele muchiilor  $AD$ ,  $BC$ , respectiv  $VA$ . Demonstrați că unghiul dreptei  $CP$  cu planul  $(BAD)$  are măsura de  $45^\circ$  dacă și numai dacă unghiul dreptei  $CP$  cu planul  $(VMN)$  are măsura de  $30^\circ$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  care verifică simultan condițiile:

- (i)  $x \geq 2y^2$
- (ii)  $y \geq 2x^2$
- (iii) numărul  $8(x - y)$  este întreg.

**Problema 4.** Dacă  $m$  este un număr natural nenul, notăm cu  $S(m)$  suma divizorilor naturali ai lui  $m$ , iar dacă  $n$  și  $p$  sunt numerele naturale nenule, notăm cu  $C(n, p)$  suma căturilor împărțirilor lui  $n$  la divizorii naturali ai lui  $p$  (de exemplu,  $C(18, 10) = 18 + 9 + 3 + 1 = 31$ ).

Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale nenule.

- a) Demonstrați că, dacă  $S(a) = C(a, b)$  și  $S(b) = C(b, a)$ , atunci  $a = b$ .
- b) Este totdeauna adevărat că, dacă  $S(a) + S(b) = C(a, b) + C(b, a)$ , atunci  $a = b$ ?

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*