



Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2024. március 10.

VI. OSZTÁLY

1. feladat. Határozd meg azokat az x, y, z természetes számokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2^x - 2^y - 2^z = 1023.$$

2. feladat. a) Igazold, hogy a $12n + 13$ és $13n + 14$ számok relatív prímek bármely n természetes szám esetén!

b) Határozd meg az (a, b) természetes számokból álló számpárok számát, amelyekre létezik olyan n természetes szám, amelyre $\frac{a}{b} = \frac{12n + 13}{13n + 14}$ és $17a + 19b < 2024$.

Gazeta Matematică

3. feladat. Azt mondjuk, hogy az m és n nemnulla természetes számok P tulajdonságúak, ha az m szám bármely d_1 osztója és az n szám bármely d_2 osztója esetén $d_1 + d_2$ prímszám.

a) Igazold, hogy ha az m és n különböző számok P tulajdonságúak, akkor $m + n$ páratlan szám!

b) Határozd meg a P tulajdonságú (m, n) , $m \leq n$ természetes számpárokat!

4. feladat. Az ABC háromszögben $\widehat{BAC} = 54^\circ$ és $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Legyen D az a pont a BC szakaszon, amelyre $AD = AB$ és E az a pont az AD szakaszon, amelyre $BE = BD$. Az F pont a BE és AC egyenesek metszéspontja, DM az ADF szög szögfelezője, ahol $M \in AC$. A C pontból az AB egyenesre állított merőleges a DM -et a G pontban metszi.

a) Igazold, hogy az ABF háromszög egyenlő szárú!

b) Igazold, hogy $CG = CM$.

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.